Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Ottobre-Dicembre 1942 - Serie IV, vol. XXII, nn. 4-5 (pagg. 145-157)

CARLO FELICE MANARA

VEDUTE SULLA GEOMETRIA DEL TRIANGOLO

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Ottobre-Dicembre 1942 - Serie IV, vol. XXII, nn. 4-5 (pagg. 145-157)

CARLO FELICE MANARA

VEDUTE SULLA GEOMETRIA DEL TRIANGOLO

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

Bologna - Cooperativa Tipografica Azzoguidi - 1942-XX

1. - Le trattazioni proiettive della Geometria del Triangolo.

A chi consideri il grandissimo numero di teoremi e di proprietà il cui corpo costituisce la cosidetta Geometria del Triangolo, si presenta spontanea la domanda se non sia possibile coordinare tali teoremi seguendo una linea logica interiore ed organica, ai fini di un'esposizione che non raggruppi le proprietà studiate tenendo conto della sola analogia e somiglianza esteriore.

L'osservazione che si presenta immediata è che tale esposizione e coordinazione dipenderà essenzialmente dal punto di vista in cui ci si mette e dal campo delle cognizioni geometriche che si vogliono supporre note nel lettore. Invero la Geometria del Triangolo è nata e si è sviluppata per la maggior parte nel campo della Geometria elementare, metrica; ma, rimanendo in tale campo non è molto facile poter raggiungere risultati notevoli dal nostro punto di vista: si può, per es., tentare di cercare un teorema molto fecondo di conseguenze da considerarsi in certo modo come fondamentale, da cui tanti altri possano dedursi come casi particolari; si ottiene in tal modo una specie di genealogia di teoremi tra loro subordinati. Genealogia e subordinazione che dipenderanno essenzialmente dal teorema scelto come fondamentale e dalla sua fecondità.

Si presenta quindi spontaneo il ricorso a campi più vasti, a concetti più generali ed a metodi più potenti che permettano di inquadrare il campo di studio e di illuminarlo maggiormente: perchè è noto quanto sia feconda di risultati ed apportatrice di luce l'applicazione delle matematiche superiori ai campi elementari.

Ora il campo che si presenta qui come naturale estensione della Geometria elementare è quello della Geometria proiettiva: la possibilità di mettere sotto forma proiettiva tutte le relazioni metriche e di considerare il gruppo delle trasformazioni elementari del piano (il « Gruppo principale » di KLEIN) come quel sottogruppo delle trasformazioni proiettive che lascia ferma la coppia di punti ciclici, permette facilmente di prevedere la vastità e la eleganza delle sintesi che si otterranno.

Prova di quanto asseriamo sono, per es., i risultati contenuti in due articoli di G. BIGGIOGERO a titolo: *Una visione proiettiva della Geometria del Triangolo,* comparsi in questo « Periodico » negli anni 1928–29.

In generale è fondamentale in questo ordine di idee l'osservazione [1] che un triangolo ed un punto (o una retta) del suo piano non hanno invarianti proiettivi, cosicchè molti dei cosidetti punti (o rette) notevoli devono proiettivamente equivalersi; così come devono essere proiettivamente equivalenti molte coniche notevoli inscritte nel (o circoscritte al) triangolo, dato che nemmeno una conica e tre sue tangenti (o punti) hanno invarianti proiettivi.

Non è nostra intenzione proseguire qui per questa via, poichè abbiamo sopra citato notevoli trattazioni che si ispirano a questo ordine di idee.

Solo vogliamo ricordare un'osservazione che è strettamente connessa a questi metodi proiettivi di trattazione dell'argomento e che può aprire la via non solo ad eleganti generalizzazioni, ma sopratutto a notevolissime classificazioni dei teoremi della Geometria del Triangolo, tali da portare veramente alla scoperta del loro significato profondo [2].

Invero, poichè, come è noto, la Geometria proiettiva è indipendente dal postulato euclideo delle parallele, si possono classificare le proprietà proiettive del Triangolo secondo che esse sono valide in Geometria assoluta, quando si assuma come assoluto del piano una qualunque conica non degenere, oppure no.

Un esempio delle prime è dato dalla concorrenza in un

---

[1] v. RETALI e BIGGIOGERO: *La Geometria del Triangolo,* § 41; *Cenno sulla estensione proiettiva della G. d. T.,* in « Enciclopedia delle Matematiche elementari », vol. II, parte I.

[2] v. BERKHAN e MEYER in « Encykl. der Math. Wiss. », III-AB-10, § 55.

punto delle perpendicolari mandate ai lati di un triangolo nei loro punti medii ([3]).

E ancora, postulata l'esistenza di una retta di punti impropri del piano (caso euclideo) si possono di nuovo suddividere le proprietà euclidee del triangolo secondo che esse sono valide semplicemente in relazione alla retta impropria oppure ad una particolare involuzione su di essa (in questo caso l'involuzione assoluta). Le prime proprietà, che potrebbero dirsi « affini », si mantengono invariate di fronte al gruppo delle affinità piane, e ne è esempio la concorrenza in un punto delle mediane relative ai tre lati, mentre le seconde sono invarianti di fronte al solo « Gruppo principale » (più ristretto) e sono le vere e proprie proprietà « metriche » del triangolo.

Vogliamo qui brevemente sottoporre all'attenzione del lettore un'altra questione, già ampiamente trattata ([4]); questione che in sostanza viene posta dalla osservazione che si trova press'a poco in tutte le trattazioni di Geometria del Triangolo, che cioè è un poco difficile definire questa Geometria e tracciarne nettamente i limiti. La questione qui posta riguarda la stessa caratterizzazione della Geometria del Triangolo ed è in certo modo indipendente dalle sintesi e dalle trattazioni che si possono dare in questa Geometria mediante la Geometria proiettiva. Infatti la sua risoluzione richiede non tanto un'estensione del campo di cognizioni geometriche, quanto un'analisi più profonda dei concetti fondamentali che sono a base dell'argomento di studio.

Invero la Geometria del Triangolo viene generalmente definita come.... « lo studio dei punti, delle rette, dei cerchi e delle coniche notevoli del triangolo, e delle trasformazioni, lineari e quadratiche cui dà luogo il triangolo stesso » ([5]). Definizione che dal punto di vista logico non è troppo soddisfacente ed è fonte di inevitabili oscurità ed incertezze finchè non venga stabilito con sufficiente precisione che cosa si intenda per punto (o retta, ecc.) notevole del triangolo. Onde giustamente una esposizione soddisfacente della Geometria del Triangolo deve inizialmente precisare questo punto: così come

---

([3]) v., per es., FANO: *Geometria non Euclidea,* cap. II, § 23.

([4]) v., per es., l'op. cit., in ([2]).

([5]) v., per es., RETALI e BIGGIOGERO: op. cit., § 1. Oggetto della G. d. T.

è fatto nella già citata trattazione di BERKHAN e MEYER (v. nota (2)), i cui concetti ispiratori noi vogliamo qui brevemente richiamare ai lettori.

2. - Il concetto di « Punto notevole ».

Fermiamoci un momento a considerare qualche esempio di quelli che vengono comunemente chiamati punti notevoli del triangolo ABC — e sia, per fissare le idee, il baricentro G — e cerchiamo quali siano le principali proprietà che lo facciano così classificare. Il fatto che richiama anzitutto l'attenzione e che viene esposto anche nelle comuni trattazioni elementari è che il baricentro G può essere definito (fig. 1) sia come intersezione della coppia di mediane AM_A, BM_B quanto della coppia BM_B, CM_C quanto della coppia CM_C, AM_A: da qualunque delle tre coppie di mediane si parta, le costruzioni geometriche conducono, invece che a tre, ad un unico punto. In altre parole:

« Il baricentro ammette una definizione geometrica simmetrica rispetto agli elementi del triangolo ABC ».

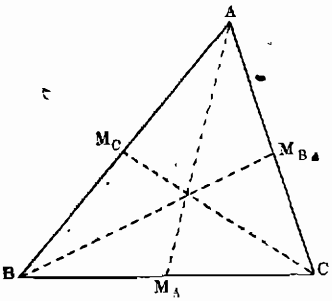

Fig. 1.

Se cerchiamo di generalizzare e precisare questa osservazione, siamo condotti a dire che:

« La proprietà fondamentale di ogni elemento notevole si può far consistere nel fatto che esso ammette relazioni geometriche simmetriche rispetto agli elementi del triangolo ».

Infatti in generale un punto P del piano può essere in tanti modi messo in relazione con gli elementi di un triangolo ABC. Si possono, per es., considerare le distanze di P dei vertici, oppure dalle rette dei lati, oppure gli angoli sotto cui si vedono da P i lati stessi, e così via.

Diremo brevemente che il punto P può essere in tanti modi considerato « funzione » del triangolo ABC (prendendo qui il termine « funzione » nel suo significato più ampio); oppure, ancora, che si possono dare tante leggi per « costruire » P a partire dal triangolo. È evidente che il risultato della costruzione dipenderà essenziamente dall'ordine in cui vengono considerati gli elementi del triangolo, per cui alle 6 permutazioni degli elementi ABC corrisponderanno in generale 6 punti.

Ora, considerato un certo modo di definire P in funzione del triangolo, ossia data una certa legge per costruire P a partire dal triangolo, si presenta spontanea la domanda se non esista qualche punto che non faccia parte di un gruppo di 6 punti distinti. Più precisamente, poichè le 6 operazioni che trasformano l'una nell'altra tutte le possibili permutazioni di tre elementi ABC formano un pruppo G_6, si domanda se esista qualche punto che rimanga invariato per qualche sottogruppo del G_6 e quindi faccia parte non più di una sestina, ma di una terna o di una coppia di punti distinti; oppure che addirittura rimanga invariato per tutte le operazioni del gruppo G_6.

Se si verifica quest'ultimo caso noi potremo chiamare tale punto « notevole » rispetto al triangolo, mentre nei primi casi potremo parlare di terne o di coppie notevoli.

Benchè quanto abbiamo detto possa sembrare non contenere niente di più che osservazioni presentantisi come ovvie in ogni trattazione, anche elementare, della Geometria del Triangolo, pure ci sembra che la loro enunciazione esplicita non sia inutile. Giacchè i rilievi che abbiamo fatto possono condurre ad impostazioni di problemi del tutto diverse e più agili di quelle classiche.

Daremo nel seguito qualche esempio di questo fatto, rimandando alle trattazioni già citate per gli sviluppi più vasti ([6]), contenti se saremo riusciti ad invogliare il lettore a prendere direttamente contatto con questo ordine di idee. Qui basti rilevare, a conclusione di quanto abbiamo detto sopra, come anche le trattazioni analitiche della Geometria del Triangolo si prestino benissimo a mettere in luce quella simmetria di relazioni che qui vogliamo sottolineare come proprietà essenziale degli elementi notevoli; e, tra le trattazioni analitiche, in modo particolare quelle che utilizzano sistemi di coordinate intrinsecamente legati al triangolo. Valga l'esempio delle coordinate trilineari; esse sono prese proporzionali alle distanze

---

([6]) Oltre all'op. cit. in ([2]) si veda SOMMER: *Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus..* « in « Encykl. der Math. Wiss », III, AB, 8.

(con segno) dalle rette dei tre lati. Il sistema si presta quindi a mettere in luce una particolare relazione che un punto del piano può avere con un triangolo: le sue distanze dalle rette dei lati. Orbene il baricentro è rappresentato dalla terna di coordinate

$$x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

e l'ortocentro dalla terna

$$x : y : z = \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma}$$

(dove a, b, c ed α, β, γ misurano rispettivamente le lunghezze dei lati e le ampiezze degli angoli interni). Formule che rendono evidenti le nostre affermazioni. L'esame potrebbe essere esteso agli altri sistemi di coordinate e porterebbe sempre alla stessa conclusione. Non vogliamo quindi insistere più oltre, ma solo ripetiamo qui un'osservazione analoga a quella già fatta nel precedente §: non tutti i sistemi di coordinate intrinsecamente legati al triangolo sono della stessa potenza; infatti il sistema di coordinate baricentriche può essere usato ad esprimere proprietà invarianti per il gruppo delle affinità piane e non per il solo « Gruppo principale », perchè in esso le coordinate di un punto vengono assunte proporzionali alle aree (con segno) dei triangoli PAB, PBC, PCA ed una affinità piana altera tutte le aree di una stessa costante moltiplicativa.

3. - Terne di punti nel piano di Gauss.

Abbiamo affermato al prec. paragrafo che le osservazioni da noi fatte possono suggerire nuove vie per la trattazione dei problemi riguardanti la Geometria del Triangolo. Una di queste vie è immediatamente presentata da quella parola « funzione » da noi usata: si presenta cioè spontanea la domanda se non sia possibile una impostazione del problema dei punti notevoli tale da permettere lo studio delle proprietà di un punto notevole P, definito simmetricamente in funzione degli elementi di un triangolo, mediante quello di una funzione (nel senso dell'analisi) simmetrica dei suoi argomenti. Siamo qui naturalmente condotti a considerare i tre vertici $V_1 V_2 V_3$ come punti indici di tre valori complessi $z_1 z_2 z_3$ in un piano-sfera di Gauss ed a ricercare il significato geometrico delle funzioni simmetriche dei tre argomenti $z_1 z_2 z_3$.

Così calcoli molto semplici dànno per il baricentro G del triangolo $V_1 V_2 V_3$ l'espressione:

$$G = (z_1 + z_2 + z_3)/3$$

per il centro O del cerchio circoscritto l'espressione:

$$O = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_2 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ \bar{z}_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

(dove abbiamo indicato con z la quantità coniugata di z).

I punti della retta di EULERO vengono rappresentati dall'espressione

$$z = \lambda G + \mu O$$

con λ, μ parametri reali soddisfacenti alla relazione

$$\lambda + \mu = 1$$

e quelli del cerchio circoscritto dall'espressione:

$$z = -(\lambda_1 z_2 z_3 + \lambda_2 z_3 z_1 + \lambda_3 z_1 z_2) / (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3)$$

con $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ parametri reali omogenei soddisfacenti alla relazione

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

È però necessario tener presente la osservazione fondamentale che non tutte le funzioni simmetriche dei tre argomenti $z_1 z_2 z_3$ hanno un significato geometrico come rappresentative di elementi notevoli del triangolo $V_1 V_2 V_3$, contrariamente a ciò che potrebbe a prima vista apparire.

Se infatti applichiamo alla variabile complessa una trasformazione della forma

(1) $$z' = \alpha z + \beta$$

(con α e β costanti complesse) trasformazione che, interpretata geometricamente sul piano dà la più generale similitudine diretta, ogni elemento notevole del triangolo $V_1 V_2 V_3$ dovrà trasformarsi con la stessa legge, ossia dovrà essere covariante al triangolo rispetto alla trasformazione (1). Gli elementi notevoli del triangolo saranno quindi rappresentati da funzioni simmetriche degli argomenti $z_1 z_2 z_3$ tali che sia soddisfatta la condizione necessaria

$$f(z_1', z_2', z_3') = \alpha f(z_1, z_2, z_3) + \beta \tag{2}$$

quando z e z' siano legate dalla (1).

Molto feconda di risultati è l'idea di considerare i tre valori $z_1 z_2 z_3$ come radici di un'equazione cubica

$$F_3(z_1, z_2, z_3) = 0 \tag{3}$$

e di studiare i covarianti della forma cubica corrispondente [7].

Ci limiteremo qui a rilevare l'importanza che ha per la Geometria del Triangolo l'interpretazione geometrica della risoluzione dell'equazione cubica, così come si può trovare riportata, per es., da ENRIQUES e CHISINI [8]. Invero possiamo considerare le tre radici $z_1 z_2 z_3$ della (3) come un ciclo della proiettività ciclica del terzo ordine che le permuta tra loro: Proiettività che, insieme col suo quadrato e con l'identità, forma un sottogruppo ciclico dell'intero gruppo diedrico di 6 proiettività che trasformano in sè una terna di punti della retta. La risoluzione dell'equazione quadratica risolvente della (3) equivale alla ricerca dei punti uniti di tale sottogruppo ciclico di proiettività. Ora che questa coppia di punti uniti, geometricamente interpretata, si presenti come una coppia di punti notevoli rispetto al triangolo delle radici della (3) risulta subito dall'osservare che questa coppia è definita non solo simmetricamente, ma anche proiettivamente rispetto a tale triangolo, ossia in modo invariante rispetto a trasformazioni del tipo

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{4}$$

di cui manifestamente la (1) è un caso particolare.

---

(7) BELTRAMI: *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche.* « Opere », tomo II.

(8) *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, libro I, cap. I, § 5.

Indicheremo tale coppia con $H_1 H_2$ e la chiameremo coppia hessiana della terna di radici della (3), perchè l'equazione che dà la coppia $H_1 H_2$ si ottiene notoriamente anche uguagliando a 0 il covariante hessiano della forma cubica relativa alla (3) stessa.

Per studiare ora in quali relazioni stia la coppia $H_1 H_2$ col triangolo $V_1 V_2 V_3$ osserviamo che la terna suddetta può, in un numero finito di modi, essere trasportata sulla terna 1, ε, ε^2 mediante una trasformazione proiettiva del tipo (4) (fig. 2) (ε, ε^2 radici cubiche complesse dell'unità). Ora in questo caso molto semplice i tre punti 1, ε, ε^2 sono ai vertici di un triangolo equilatero e le proiettività cicliche che mutano la terna in sè sono date dalle rotazioni di $2\pi/3$ e di $4\pi/3$ attorno al punto O, centro di tale triangolo. In formule tali proiettività sono date da

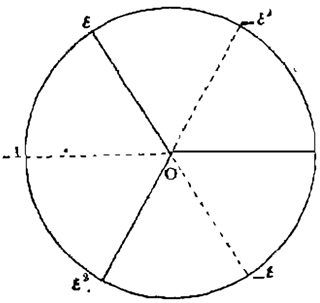

Fig. 2.

$$z' = \varepsilon z\ ; \quad z' = \varepsilon^2 z$$

e di qui risulta immediatamente che esse ammettono come punti uniti i valori 0 e ∞. Concluderemo dicendo: ogni trasformazione del tipo (4) che porti la terna $z_1 z_2 z_3$ nella terna 1, ε, ε^2 porta la coppia $H_1 H_2$ nella coppia 0, ∞. Ma le trasformazioni del tipo (4) (affinità circolari di MÖBIUS) sono omocicliche ed isogonali, ossia portano cerchi e rette in cerchi o rette, conservando gli angoli. Ora osserviamo che le rette che congiungono il punto O coi punti 1, ε, ε^2 sono ortogonali al cerchio dei tre punti e formano tra loro angoli di $2\pi/3$ e concluderemo che i punti $H_1 H_2$ sono quei punti del piano del triangolo $V_1 V_2 V_3$ che sono base di un fascio di cerchi tutti ortogonali al cerchio circoscritto al triangolo stesso, e tale che i tre cerchi del fascio passanti per i vertici formano tra loro nei punti base angoli di $2\pi/3$ (fig. 3).

Che poi i punti $H_1 H_2$ siano allineati col centro del cerchio circoscritto si deduce immediatamente osservando che nel fascio $H_1 H_2$ c'è un cerchio passante per il punto $z = \infty$ e quindi degenere nella retta $H_1 H_2$ e che tale retta, dovendo, come tutti i cerchi del fascio essere ortogonale al cerchio circoscritto, deve passare per il suo centro. Se ora esaminiamo più davvicino il gruppo delle 6 proiettività complesse che mutano in sè la terna $V_1 V_2 V_3$, gruppo oloedricamente isomorfo con quello totale delle sostituzioni su tre elementi, vediamo che esso si compone, oltre che del sottogruppo ciclico comprendente l'identità e le due proiettività cicliche $(V_1 V_2 V_3)$ e $(V_1 V_3 V_2)$, delle tre

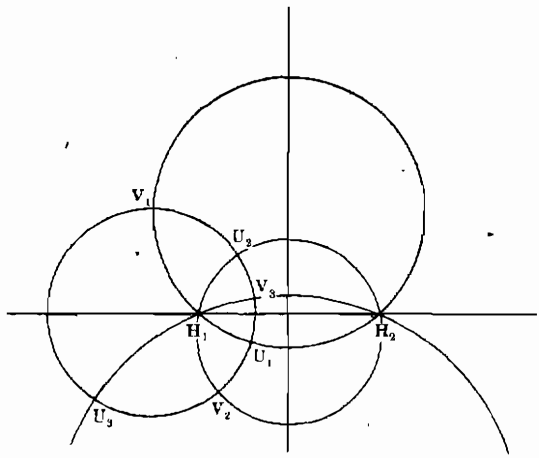

Fig. 3.

involuzioni che lasciano fermo un punto della terna e scambiano tra loro gli altri due. Esse lasciano quindi ferma una seconda terna di punti $U_1 U_2 U_3$ formata dai tre punti che, insieme con ciascun punto della terna $V_1 V_2 V_3$, separano armonicamente gli altri due. Un semplice esame della figura permette di accertarsi che, quando la terna $V_1 V_2 V_3$ sia trasportata sulla terna $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ la $U_1 U_2 U_3$ è data da $-1, -\varepsilon, -\varepsilon^2$.

In generale quindi la terna $U_1 U_2 U_3$ dà un triangolo che ha lo stesso cerchio circoscritto della $V_1 V_2 V_3$ e tale che ogni cerchio del fascio $H_1 H_2$ che passa per un punto V_i interseca sul cerchio circoscritto il corrispondente U_i.

4. - Terne di punti su una conica.

La considerazione del triangolo $V_1 V_2 V_3$ nel piano della variabile complessa ci ha permesso di ottenere una configurazione di elementi notevoli ad esso relativi (una coppia di punti ed un secondo triangolo) che si presentano naturalmente come i primi e più importanti elementi notevoli, essendo invarianti di fronte al gruppo totale delle proiettività del piano complesso che trasformano il triangolo in sè. Se consideriamo ora il triangolo non più nel piano della variabile complessa ma nel piano proiettivo e ci lasciamo guidare da considerazioni dello stesso genere, giungiamo con grande naturalezza ad altri elementi notevoli, definiti anche qui come invarianti di fronte a gruppi di trasformazioni che mutano il triangolo in sè.

Consideriamo dunque il triangolo $V_1 V_2 V_3$ nel piano proiettivo ed il relativo cerchio circoscritto k. Ricordiamo che esiste una ed una sola omografia piana che porta una conica c in un'altra determinata c', con la condizione che una terna di punti su c vada in una terna prefissata su c'. Esiste quindi una ben determinata omografia piana che trasforma in sè il cerchio k portando i tre punti $V_1 V_2 V_3$ nei punti stessi presi in un altro ordine.

Le omografie come questa saranno tante quante sono le diverse permutazioni degli elementi $V_1 V_2 V_3$ e formeranno anche qui un gruppo oloedricamente isomorfo a quello totale delle sostituzioni su tre elementi. Orbene siamo naturalmente portati a domandarci se esista qualche elemento del piano (punto o retta) che sia invariante per tale gruppo di omografie. La risposta è immediata e ci condurrà a definire per questa via un punto ed una retta che, in questo ordine di idee, appaiono come gli elementi notevoli fondamentali e che sono comunemente chiamati punto e retta di LEMOINE. Essi sono l'uno interno e l'altra esterna al cerchio k, e rispettivamente polo e polare rispetto a questo cerchio.

Osserviamo che l'intero gruppo Γ_6 delle 6 omografie piane che trasformano in sè il triangolo $V_1 V_2 V_3$ e il cerchio k può ritenersi generato da due fra le tre involuzioni seguenti: I_1 che lascia fermo V_1 e scambia tra loro $V_2 V_3$, I_2 che lascia fermo V_2 e scambia tra loro $V_3 V_1$, ed I_3 che lascia fermo V_3 e scambia tra loro $V_1 V_2$. Il polo P_1 di I_1 (fig. 4) è definito dall'intersezione della retta $V_2 V_3$ e della tangente al cerchio k in V_1 ed analogamente gli altri. Ora il teorema di PASCAL ci assicura che i tre

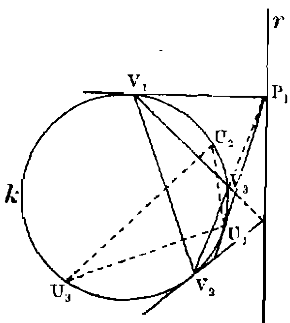

Fig. 4.

punti $P_1 P_2 P_3$ sono allineati e, per quanto abbiamo detto sopra, la loro retta r è invariante per tutte le omografie dell'intero gruppo Γ_6.

Assieme alla retta r è manifestamente invariante il polo R di r rispetto a k. Le ulteriori tangenti mandate a k dai punti $P_1 P_2 P_3$ definiscono su k stesso il triangolo $U_1 U_2 U_3$ che è manifestamente invariante per tutte le omografie che mutano in sè il triangolo $V_1 V_2 V_3$ ed il cerchio k, e i due triangoli $V_1 V_2 V_3$ e $U_1 U_2 U_3$ sono omologici rispetto al centro R ed all'asse r.

Possiamo ora osservare che, dato il gruppo Γ_6 di omografie, ogni punto del cerchio k definisce un gruppo di una g_6^1 diedrica a cui appartiene, e i punti di ogni gruppo, presi in ordine opportuno, definiscono un esagono inscritto in k che ha la retta r ed il punto R come retta di PASCAL e punto di BRIANCHON. Abbiamo quindi, in relazione al Γ_6, infiniti esagoni aventi tutti la stessa retta di PASCAL e lo stesso punto di BRIANCHON: in particolare due esagoni cosiffatti sono dati dai triangoli $V_1 V_2 V_3$ e $U_1 U_2 U_3$, ognuno contato due volte.

È facile convincersi che il triangolo $U_1 U_2 U_3$ è quello stesso considerato nel precedente paragrafo.

Basta ricordare che quattro punti di un cerchio, considerati nel piano della variabile complessa, hanno un birapporto reale e che ha lo stesso valore del birapporto che compete loro quando si consideri il cerchio nel piano proiettivo ([9]). Ora le costruzioni fatte e le definizioni poste ci portano a considerare il punto U_1 come quarto armonico dopo $V_2 V_3$ e V_1, tanto nel piano della variabile complessa quanto sul cerchio considerato nel piano proiettivo; e lo stesso si dica di U_2 ed U_3.

È pure facile vedere che la retta r è l'asse del segmento $H_1 H_2$. Basta osservare che, poichè da P_1 partono due tangenti a k nei punti $V_1 U_1$, P_1 è il centro di un cerchio ortogonale a k passante per $V_1 U_1$ e lo stesso si dica per $P_2 P_3$. La retta r risulta dunque la retta dei centri dei cerchi del fascio di punti base $H_1 H_2$, e quindi asse del segmento $H_1 H_2$.

Non è nostra intenzione insistere e sviluppare qui le dimostrazioni di altre proprietà, perchè questo ci porterebbe fuori dei confini del programma che ci eravamo tracciato: quello

---

([9]) Per la facile dimostrazione di questo fatto si veda per es.: CHISINI: *I Gruppi finiti di proiettività*. « Periodico di Mat. », 1938, n. 2.

di richiamare l'attenzione su questo fondamentale problema della Geometria del Triangolo che è la precisazione del concetto di elemento notevole.

L'osservazione che fa consistere la caratteristica di questi elementi nell'esistenza di particolari relazioni col triangolo simmetriche rispetto agli elementi del triangolo stesso è ovvia e si presenta a chiunque esamini i pochi esempii di elementi notevoli che sono dati nei trattati di Geometria elementare, ma, ad un esame più approfondito, si rivela più feconda di risultati di quanto non possa apparire a prima vista.

Infatti il concetto di relazione simmetrica rispetto agli elementi del triangòlo porta spontaneamente con sè quello di invarianza rispetto a qualche gruppo di trasformazioni relativo al triangolo stesso, e qui nascono delle impostazioni e delle trattazioni dei problemi che possono ben dirsi inaspettate e certamente fuori dal quadro delle trattazioni abituali.